La teoría de las Ideas. Una exposición esquemática de la filosofía de Albert Lautman

José Pedro Arriaga Arroyo
Universidad de Guanajuato
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
jp.arriaga@ugto.mx

Resumen: El presente artículo expone la filosofía de Albert Lautman (1908-1944) señalando sus puntos de vista centrales, explicándolos brevemente, y mostrando cómo estos se relacionan entre sí en un todo. Esta exposición es distinta de las que se encuentran en la literatura dedicada al autor por su afán de sistematicidad. El objetivo es ofrecer una presentación lo más clara posible de la filosofía lautmaniana para introducir en ella a quien aún no la conozca y para clarificarla un poco más a quien ya le es familiar.

Palabras clave: Zalamea, física, matemática, ontología, fenomenología.

Recibido: mayo 18, 2021. **Revisado**: octubre 1, 2021. **Aceptado**: noviembre 17, 2021.

Devenires. Año xxiii, Núm. 45 (enero-junio 2022): 41-63
ISSN: 1665-3319 / **ISSN-e:** 2395-9274

The theory of Ideas. A schematic exposition of Albert Lautman's philosophy

José Pedro Arriaga Arroyo
Universidad de Guanajuato
Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo
jp.arriaga@ugto.mx

Abstract: This article presents the philosophy of Albert Lautman (1908-1944), singling out and explaining its main insights, and showing how they relate to each other as a whole. The exposition of Lautman's work aims to be systematic and thus differ from others found in the literature. The objective is to provide the clearest possible presentation of lautmanian philosophy, in order to serve as an introduction to those who are not acquainted with it, and to clarify it further to those who already are.

Keywords: Zalamea, physics, mathematics, ontology, phenomenology.

Received: May 18, 2021. **Reviewed**: October 1, 2021. **Accepted**: November 17, 2021.

Devenires. Year xxiii, No. 45 (January-June 2022): 41-63
ISSN: 1665-3319 / **ISSN-e:** 2395-9274

Introducción

La filosofía de Albert Lautman (1908-1944) aún no es lo suficientemente conocida en los ámbitos de la filosofía de la ciencia y de las matemáticas que fue en los que se desenvolvió. Para mostrarlo basta constatar su ausencia en las principales compilaciones dedicadas a la filosofía de las matemáticas, como la de Paul Benacerraf y Hilary Putnam (1998), la de Dale Jacquette (2002) o la de Stewart Shapiro (2005); así como percatarse de que no hay un solo artículo dedicado a Lautman en la revista especializada *Philosophia mathematica*.[1] En el caso de la filosofía de la ciencia, aunque es un campo más amplio, cabe decir que Lautman, junto con otros autores de la tradición francesa, como Gaston Bachelard o Georges Canguilhem, ha sido ampliamente desplazado por los grandes nombres de la rama como Karl Popper, Imre Lakatos, Paul Feyerabend, Thomas Kuhn, o Bas Van Fraassen. Pero, más aún, incluso dentro de la misma tradición francesa de la filosofía de la ciencia y de la matemática, como lo escribe su hijo Jaques Lautman (2006: 9-10), la filosofía lautmaniana ha ocupado un lugar secundario al ser percibida en general, y erróneamente, como la sombra o epígono del pensamiento del más conocido Jean Cavaillès.

En parte, esta situación se explica por lo breve e incipiente del pensamiento de Lautman debido a su temprana muerte, aunque también es un factor el acceso difícil que su obra posee para el filósofo debido a que en ella se tratan ejemplos matemáticos y físicos un tanto avanzados. No obstante, varios son los autores que han podido ver la riqueza, profundidad y relevancia contemporánea que tiene la visión lautmaniana y, así, la han tratado, adoptado e incluso desarrollado en algún sentido alejándose de las corrientes principales de la filosofía de la ciencia y las matemáticas. Un caso conspicuo es el de Fernando Zalamea quien,

[1] Según una revisión en el sitio oficial de la revista realizada en abril del 2021.

además de traducir la obra de Lautman al español, entregando la edición más completa en cualquier idioma (Lautman, 2011), ha avanzado reflexiones filosóficas sobre la matemática y otros temas en las que las concepciones lautmanianas son pieza clave.[2] Algunos otros autores que han entregado reflexiones importantes en torno a la filosofía de Lautman son Jean Petitot (1987), Charles Alunni (2005), Emmanuel Barot (2003, 2009), Jean-Michel Salanskis (2008), David Corfield (2010), Pierre Cassou-Noguès (2010), entre otros.

Ahora bien, para poder captar esa relevancia apreciada por otros, o para ponerla en duda, es necesario primero conocer la filosofía lautmaniana en sí misma, al menos, en sus puntos de vista más significativos. Considerando que en cuanto a presentaciones de la filosofía de Lautman se refiere se cuenta casi exclusivamente con el artículo de Jean Petitot (1987), el libro de Emmanuel Barot (2009), y con un par de textos de Fernando Zalamea (1994, 2011), deseo contribuir aquí con una presentación más que ayude a acercar el pensamiento lautmaniano a quien aún no lo conozca y a clarificarlo para aquellos a quienes ya le es familiar. Sin embargo, no me limito aquí a resumir o sintetizar lo hecho por otros, pues, apoyándome en un trabajo anterior (Arriaga, 2018), procedo de una manera que aún no se había intentado. El enfoque aquí tomado consiste en ir presentando los elementos básicos de la filosofía lautmaniana, es decir, las decisiones o puntos de vista centrales que conforman su pensamiento, e irlos relacionando unos con otros a medida que se avanza, de tal suerte que el resultado final sea una sistematización esquemática de su pensamiento. Ahora bien, en los puntos que pudieran resultar más oscuros doy una explicación que considero suficiente para comprender el sentido general de lo ahí expresado, pero no creo que esta sea una explicación completa o definitiva. Esto se debe a que me he ocupado aquí más de la comprensión de los puntos de vista lautmanianos que del seguimiento a profundidad de sus consecuencias. Lo mismo se

[2] Como ejemplos se puede citar su *Seminario Continuo de Filosofía de las matemáticas. Epistemología e Historia de las matemáticas* en la Universidad Nacional de Colombia (2012-2018) (Cfr. Pérez, 2019), su excelentísimo ensayo *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas* (Zalamea, 2009), así como artículos e incluso ensayos en los que la impronta lautmaniana es patente (Zalamea, 1994, 2006a, 2008, 2013).

puede decir de sus referentes filosóficos que, en general, están excluidos de la exposición, salvo las excepciones de Leon Brunschvicg, David Hilbert y Martin Heidegger que son referentes que tocan puntos cruciales del pensamiento lautmaniano. No obstante, considero que el esquema final aquí presentado representa con alta fidelidad la filosofía de Lautman y no veo mucho más que se le pueda agregar a título de esquema. Si alguien quisiera contribuir a esta exposición, las observaciones son bienvenidas y harían que este texto cumpliera con creces su objetivo.

1. El *tauma* y el objetivo de la filosofía

Comencemos con lo más fundamental: el objetivo de la filosofía lautmaniana. Este primer punto dará la base para desarrollar el resto de la exposición. Pues bien, para Lautman, el problema central de la filosofía de la ciencia es el de la aplicación de la matemática a la realidad y, en particular, *el problema de la aplicación de la matemática en la física* (PAF). Así, escribe: “El problema capital de la filosofía de la ciencia es, sin duda alguna, aquel de las relaciones entre la teoría matemática y la experiencia física” (Lautman, 2011: 441). En otro lugar, y contra la idea de que el estudio formal del lenguaje científico debe ser el único objetivo de la filosofía de la ciencia, replica: “Esa es una tesis difícil de aceptar para los filósofos que consideran como su tarea esencial establecer una teoría coherente entre la lógica y lo real. Hay un real físico, y el milagro a explicarse consiste en que se requieren las teorías matemáticas más desarrolladas para interpretarlo” (Lautman, 2011: 77). Cuando se refiere aquí a esos “filósofos que consideran como su tarea esencial establecer una teoría coherente entre la lógica y lo real”, sin duda, se refiere a él mismo.

El PAF tiene un lugar preeminente en la filosofía de Lautman ya que él considera que ahí se plantea la pregunta central que llama la atención del filósofo sobre la matemática: “El filósofo no es, en efecto, matemático por naturaleza. Si el rigor lógico-matemático puede seducirle [es] porque ilumina excelentemente el enlace de las reglas y sus dominios”

(Lautman, 2011: 77). Para Lautman, entonces, no es el rigor matemático por sí mismo el que despierta el interés del filósofo en la matemática, sino la relación que ésta entabla con un campo o dominio que, tras su matematización, aparece como un dominio del cual se conocen sus reglas esenciales y que, por lo tanto, lo podemos tener por comprendido o conocido. Por esto, a esta comprensión o conocimiento de lo real por lo matemático es a lo que se puede denominar el *tauma filosófico-matemático* lautmaniano, pues este es el hecho que causa la sorpresa (*tauma*) que impulsa al filósofo a sus indagaciones sobre la ciencia y, en particular, sobre las relaciones entre la realidad física y la matemática. Finalmente, cabe señalar que este *tauma* rebasa el campo de la filosofía de la ciencia y toma un sentido epistemológico general, y quizá incluso existencial, pues en el PAF se plantea una cuestión fundamental dado que el acuerdo entre la realidad y la matemática, para Lautman, no es nada menos que “la prueba de la inteligibilidad del universo” (Lautman, 2011: 80). Por esto, resolver el PAF implicaría comprender en buena medida la manera en que el universo aparece como comprensible o cognoscible.

2. La hipótesis física

Para afrontar el PAF, Lautman plantea lo que llamaré aquí su *hipótesis física* (HF). Ésta afirma que las teorías y leyes de la física “no son más que una representación concreta de nociones definibles únicamente en el seno de una teoría matemática” (Lautman, 2011: 441). Para explicar lo enunciado en la HF es necesario, primero, detenernos un poco en la terminología. El concepto de “noción” que figura en la HF, junto con el concepto de “idea”, y de “dialéctica”, son centrales en toda la filosofía lautmaniana. Sobre estos conceptos Lautman escribe: “Llamo *nociones* a nociones [sic] como el todo, la parte, el continente, el contenido, la estructura […], la existencia, etc. Llamo *idea* al problema de establecer relaciones entre las nociones así definidas” (2011: 453-454); y “la Dialéctica, en sí misma, es problemática pura, antitética fundamental, relativa a pares de nociones que parecen oponerse a primera vista, pero a propósito de las que se plantea, no obstante, una síntesis o una conciliación posible" (2011: 380). Para diferenciar el sentido en que Lautman usa los conceptos de "noción", "idea" y "dialéctica" escribiré, desde ahora, "Noción", "Idea" y "Dialéctica" respectivamente como él lo hace en algunos de sus textos. Haré lo mismo al referirme a alguna noción en particular; así, por ejemplo, la Noción "todo", la escribiré "Todo". No aplicaré esta regla a las citas.

Ahora bien, por una parte, es claro en las definiciones antes dadas que el concepto de Idea es prácticamente el mismo que el de Dialéctica, ambos refieren al problema de las relaciones, conciliación o síntesis de las Nociones, por lo cual se pueden usar e interpretar de la misma forma. Yo usaré en lo que sigue preferentemente el término Idea. Por otra parte, también es evidente que la definición ostensiva que da Lautman de las Nociones no es suficiente y esto oscurece también el sentido del concepto de Idea. Desde ahora tengo que decir que no daré en este artículo una definición teórica completamente satisfactoria de estos conceptos, pues *su comprensión cabal constituye uno de los problemas centrales de la filosofía lautmaniana* como se podrá apreciar con el resto de la exposición. Por lo pronto basta que entendamos por "Nociones" ciertas propiedades generales que pueden aparecer en diversos fenómenos físicos que tienen varias formas de ser definidas matemáticamente. De este modo, por ejemplo, en el texto *Simetría y disimetría en matemáticas y en física*, Lautman (2011: 385-403) trata, precisamente, a la Simetría y a la Disimetría como Nociones que caracterizan ciertas propiedades generales pero esenciales de fenómenos físicos como el espín del electrón, la relación entre gravedad y electromagnetismo, y algunos hechos estudiados por la mecánica ondulatoria. El punto crucial aquí reside en que esas Nociones encuentran su síntesis adecuada en las matemáticas, y así, el que estos fenómenos tengan "Una participación común en una misma estructura dialéctica pondría así en evidencia una analogía entre las estructuras del mundo sensible y la estructura de las matemáticas, y permitiría entender mejor cómo esas dos realidades concuerdan entre sí" (Lautman, 2011: 390). En breve, lo que Lautman propone en la HF es que la aplicación de las matemáticas a la física es posible porque aquellas resuelven la Idea de ciertas Nociones que se encuentran en los fenómenos físicos. Se puede representar la HF, entonces, de la siguiente manera:

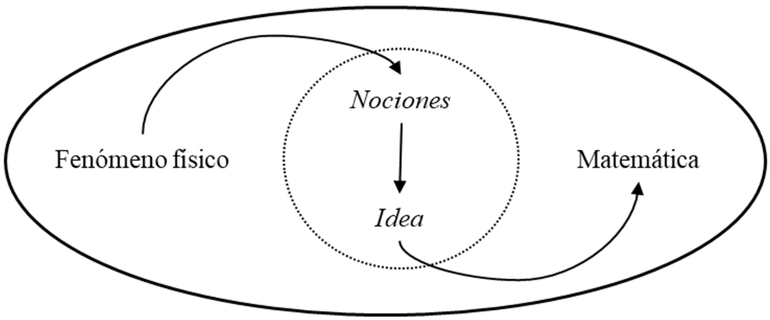

Figura 1. Esquema de la HF

Así presentada, se pueden percibir claramente dos relaciones relevantes en la HF: una que va del fenómeno físico a las Nociones y su Idea, y otra que va de éstas hacia la matemática. Entonces, una pieza clave para entender mejor la HF es aclarar cómo se relacionan el fenómeno físico y las Nociones. Este punto en particular no se explora en la obra de Lautman y, por lo tanto, queda como supuesto en los ejemplos que hay a lo largo de su obra, en particular, en el texto ya mencionado, *Simetría y disimetría en matemáticas y en física*, pero también en *El problema del tiempo*, que son los dos textos que Lautman dedica a la filosofía de la física. Lo que de ahí se puede extraer, resumiendo, es lo que ya se había afirmado antes, a saber, que las Nociones son conceptos que capturan ciertas propiedades esenciales de los fenómenos físicos que se buscan conocer. Queda pues esta relación como un hueco a llenar en el pensamiento lautmaniano. Sin embargo, en lo que toca a la relación entre las Nociones y su Idea con las matemáticas, ésta será la que ocupe más profundamente al filosofar de Lautman.

3. La hipótesis ontológica de la matemática

Hablar de la relación entre las Nociones, su Idea y la matemática nos lleva al corazón de la filosofía de Lautman: su filosofía de la matemática; y más específicamente a su tema central: la ontología de la matemática. Esto, porque, precisamente, la ontología de la matemática lautmaniana se resuelve en la relación que hay entre matemáticas, por un lado, y Nociones e Ideas por otro. Llamaré aquí a esta concepción suya la *hipótesis ontológica* (HO). Así pues, la HO afirma que *la realidad inherente de la matemática viene de que en su movimiento ella esquematiza la síntesis de ciertas Ideas*.[3] Para comenzar a explicar lo dicho en la HO hay que introducir los dos puntos de vista filosófico-matemáticos que Lautman busca entrelazar para estudiar la realidad matemática.

El primer punto de vista lo denomino *visión dinámica* de la matemática debido a que, desde esta óptica, la realidad matemática se comprende como el resultado del choque entre la actividad creadora del matemático y una cierta materia que se le resiste. Según esta visión, "Las matemáticas se han constituido como la física: los hechos a explicar fueron, todo a lo largo de la historia, paradojas que el progreso de la reflexión tornó inteligibles, gracias a una constante renovación de sentido de las nociones esenciales" (Lautman, 2011: 135). Esta visión la retoma Lautman de su maestro Leon Brunschvicg quien, en *Las etapas de la filosofía matemática* (Brunschvicg, 1945), desarrolla una visión filosófica de la matemática decididamente antifundacionalista debido a que mantiene un antirreduccionismo radical. Esto quiere decir que, para Brunschvicg (*Cfr*. Lautman, 2011: 136), una búsqueda de fundamentos matemáticos últimos, sean estos lógicos (logicismo, formalismo), epistemológicos (subjetividad trascendental kantiana o intuición brouweriana), o de cualquier otra índole, resultará infructuosa, pues para él, la matemática es una expresión de un espíritu humano absolutamente libre y, por lo tanto, no está constreñido por ningún marco fundacional. Así, la matemática sólo puede entenderse siguiendo su evolución real, atendiendo a su desarrollo efectivo,

[3] Los pasajes más destacados donde Lautman (2011) plantea la HO son: pp. 125, 126, 128-129, 261, 265, 267, 270, 334, 353, 377, 402.

es decir, estudiando su despliegue histórico concreto. Atendiendo a esta evolución histórica, el filósofo podrá percibir las múltiples formas en las que la matemática ha conseguido superar sus paradojas o, para decirlo con Bachelard, sus obstáculos epistemológicos. El punto central de esta visión, entonces, es que la matemática se constituye dinámicamente en un esfuerzo por la búsqueda de un mayor y mejor conocimiento objetivo que se obtiene al superar ciertas problemáticas que se le presentan.

El segundo punto de vista lo llamo, con Lautman (2011: 136), y en cierta concordancia con el léxico contemporáneo de la filosofía de las matemáticas: *visión estructural*. Este punto de vista tiene su mayor antecedente en David Hilbert, el mayor referente matemático en la obra lautmaniana (*Cfr*. Zalamea, 2011: 26). No obstante, es necesario remarcar aquí que Lautman no está interesado en el programa de fundamentación formalista, pues lo que le interesa del formalismo son las consecuencias de la axiomatización con que éste reorganizó la matemática como se verá a continuación.

Así pues, la HO surge, y sólo se puede entender, en la conjunción de estos dos puntos de vista, pues ella se postula conjuntamente a una estratificación integral de la realidad matemática que obedece a la fusión de ambas visiones:

> Se puede definir la naturaleza de la realidad matemática desde cuatro puntos de vista diferentes: lo real consiste, ya sea en los hechos matemáticos, ya sea en los seres matemáticos, ya sea en las teorías, ya sea en las Ideas que dominan a esas teorías. Lejos de oponerse, esas cuatro concepciones se integran naturalmente unas con otras: los hechos consisten en el descubrimiento de seres nuevos, esos seres se organizan en teorías y el movimiento de esas teorías encarna el esquema de los enlaces de ciertas Ideas. (Lautman, 2011: 26)

Un ejemplo simple para entender esta estratificación es el siguiente:

1. Un *hecho* sería el de determinar que hay ciertos números p mayores de 1 para los cuales sus únicos factores son p y 1.
2. Ese hecho da paso al surgimiento de *objetos* matemáticos llamados números primos.

3. Los objetos llamados números primos se organizan bajo los *axiomas* de los números enteros que son la base de la teoría de números.
4. Un "movimiento" básico de esa teoría es la demostración del teorema fundamental de la aritmética, según el cual, todo entero positivo *n* diferente de 1, puede ser expresado sólo de una manera única como producto de números primos salvo el orden de los factores. En ese movimiento la inteligencia matemática aprehende y encarna la Idea de las Nociones Todo y Parte pues los números primos aparecen como la Parte elemental que puede reconstruir el Todo de los enteros positivos y, dada la existencia necesaria de los inversos de la suma, les es también posible reconstruir el Todo de los enteros en general.

Los primeros tres niveles de la realidad matemática se encuentran directamente en la visión estructural pues, desde ella, en efecto, los hechos y objetos de una teoría están virtualmente configurados en la base axiomática que le corresponde, pues "El objeto estudiado no es el conjunto de las proposiciones derivadas de los axiomas, sino un conjunto de seres organizados, estructurados, completos, como con una anatomía y una fisiología propias" (Lautman, 2011: 79). Por esto, la pregunta por la naturaleza de los objetos matemáticos se resuelve al nivel de la axiomática que los define tal como lo propondría Hilbert (1993: 17-22) para diversas teorías matemáticas como la teoría de números. Un conjunto, un número, una variedad, y cualquier otro objeto matemático es aquello que sus axiomas dictan y, por lo tanto, la pregunta filosófica por el ser de los objetos matemáticos se resuelve, en realidad, de manera técnica por la vía de su determinación axiomática. Los axiomas de una teoría son, pues, para Lautman (2011: 79), una síntesis de condiciones necesarias para un dominio de objetos y no, como la axiomática griega, unas ciertas nociones primeras generales evidentes por sí mismas. Más aún, Lautman (2011: 137) ve que estas bases axiomáticas se integran entre ellas haciendo posible pensar a la matemática como un cuerpo unitario cada vez más rico: "Hilbert substituye el método de las definiciones axiomáticas con el de las definiciones genéticas y, lejos de querer reconstruir el conjunto de las matemáticas a partir de la lógica, introduce, al contrario, pasando de la lógica a la aritmética y de la aritmética al análisis, nuevas variables y nuevos axiomas que amplían cada vez el dominio de las consecuencias".[4]

En lo que toca al cuarto nivel, este surge de la unión de la visión estructural con la dinámica. La parte que se retoma de la concepción estructural es la de la necesidad de establecer ciertas condiciones adecuadas para las bases axiomáticas. En el formalismo hilbertiano esto supone una nueva exploración metamatemática que tenga a los axiomas mismos como objetos de estudio; este es el tema de la afamada *Beweistheorie* o teoría de la prueba. La idea central de Hilbert era que había que demostrar que las bases axiomáticas cumplían con las propiedades de completitud (los axiomas aseguran la derivabilidad de todas las verdades de la teoría) y consistencia (los axiomas no pueden implicar contradicciones) y, si lo hacían, se podría entonces tener a esa axiomática y sus objetos como verdaderos y existentes. Pero, como se dijo antes, Lautman no está interesado en esta perspectiva fundacionalista, sino más bien, en el hecho mismo de que hay algo más allá de los axiomas que define su realidad. Con base en esta concepción, Lautman (2011: 139) considera

> posible pensar en otras nociones lógicas, susceptibles de ser también entrelazadas en el seno de una teoría matemática y tales que, […] puedan comportar una infinidad de gradaciones. Resultados parciales, aproximaciones detenidas a mitad de camino, ensayos que parecen aún tanteos se organizan bajo la unidad de un mismo tema y dejan vislumbrar en su movimiento un enlace que se dibuja entre ciertas ideas abstractas, que proponemos llamar dialécticas.

Un ejemplo de que estas otras "nociones lógicas" o Nociones e Ideas se desarrollan orgánicamente en la matemática formalista-estructural se encuentra en el texto *Acerca del infinito* de Hilbert (1993: 121). Ahí, él escribe:

> El infinito no tiene ningún tipo de realidad, no existe en la naturaleza ni es aceptable como fundamento de nuestro pensamiento intelectivo. Es decir, en relación con el infinito se da una armónica relación entre el ser y el pensar.

[4] Este importante tema de la unidad de las matemáticas lo trata en su *Ensayo sobre la unidad de las ciencias matemáticas en su desarrollo actual* (Lautman, 2011: 277-329).

> En abierta oposición a los intentos de Frege y Dedekind, podemos concluir que *existen ciertas representaciones e ideas intuitivas que resultan imprescindibles como condición de posibilidad de todo conocimiento científico: la lógica no basta. Las operaciones con el infinito necesitan para ser seguras de una base finita.*
>
> *El papel que resta al infinito es el de una idea, según la concepción kantiana de ésta, como un concepto de la razón que supera toda experiencia y por medio del cual se complementa lo concreto en el sentido de una totalidad.* Pero a la vez, el infinito es una idea en la que podemos confiar sin reservas en el marco de la teoría que acabo de delinear. (El énfasis es mío)

Dejando de lado la referencia a Kant, que nos llevaría demasiado lejos y, por lo tanto, será mejor aclarar en otro lugar, lo que se puede decir a partir de esta cita es que el infinito se puede entender como una Idea en el sentido lautmaniano, pues ella se encarna en diversas estructuras axiomáticas dándole realidad a los axiomas que le dan cuerpo, existencia a los objetos así definidos, y un sentido preciso a los hechos ahí integrados.

Por su parte, la visión dinámica complementa este cuadro al mostrar que la síntesis de hechos, objetos, teorías e Ideas sólo se puede realizar y comprender en la actividad del matemático pues Lautman (2011: 81) considera que “Es imposible hablar de lo real independientemente de los modos de pensamiento con los cuales se deja aprehender”. Es por esto por lo que las Ideas sólo se encarnan en el *movimiento* de las teorías, que no es otra cosa que la acción de la inteligencia matemática que se sitúa entre lo psicológico y lo lógico, y por medio de la cual se puede establecer la objetividad y realidad de la matemática: “Entre la psicología del matemático y la deducción lógica, debe haber sitio, entonces, para una caracterización intrínseca de lo real. Este debe participar a la vez del movimiento de la inteligencia y del rigor lógico, sin confundirse con uno ni otro, y será nuestra labor intentar esa síntesis”. (Lautman, 2011: 136).

Por poner un ejemplo sencillo de la HO se puede considerar la demostración de la existencia única del conjunto vacío en la teoría de conjuntos Zermelo-Fraenkel. En esta teoría se tiene el axioma de especificación por el que es posible determinar la existencia del conjunto vacío, ya que éste afirma que, dado un conjunto A y una propiedad adecuada *P*, existe el subconjunto de B de A tal que sus elementos son aquellos que poseen la propiedad *P*. Así, por ejemplo, si tomamos el conjunto de todas las vocales y luego consideramos la propiedad "vocales que para ser pronunciadas se deben juntar los labios", obtenemos como conjunto un subconjunto de las vocales que está vacío, pues ninguna de ellas cumple la propiedad. Ahora bien, es posible definir el conjunto vacío de otras maneras, por ejemplo, si ahora se considera el subconjunto de las vocales cuyos elementos cumplen la propiedad "vocales que para ser pronunciadas se deben juntar los dientes". Aquí, otra vez, nos encontramos con una propiedad que da paso a definir el conjunto vacío, pues ningún elemento de las vocales la cumple. Se puede ahora plantear la cuestión de si los dos conjuntos vacíos así obtenidos son diferentes o el mismo. Para contestar a esta pregunta se asume que ambos conjuntos son diferentes y se considera el axioma de extensionalidad, según el cual, un conjunto sólo es diferente de otro si y sólo si alguno de los dos contiene un elemento que no tenga el otro. Por este axioma, y considerando que aquí se trata de conjuntos vacíos, no es posible que uno tenga un elemento que el otro no, pues entonces uno de los dos tendría que dejar de ser vacío para ser diferente del otro. Se deduce así que la asunción de la diferencia entre conjuntos vacíos debe ser falsa.

Desde una lectura lautmaniana, esta pequeña demostración es una síntesis de las Nociones de Esencia y Existencia pues, para él, "El paso de la esencia a la existencia se debe […] a que la estructura o esencia del sistema de axiomas es apta para dar origen a las interpretaciones del sistema" (Lautman, 2011: 127), y entonces, el conjunto vacío único (que se puede simbolizar $\exists!\emptyset$) es una "interpretación necesaria" de los axiomas de Zermelo-Fraenkel. Este ejemplo se puede especificar en la Figura 2 y generalizar para toda la HO en la Figura 3.

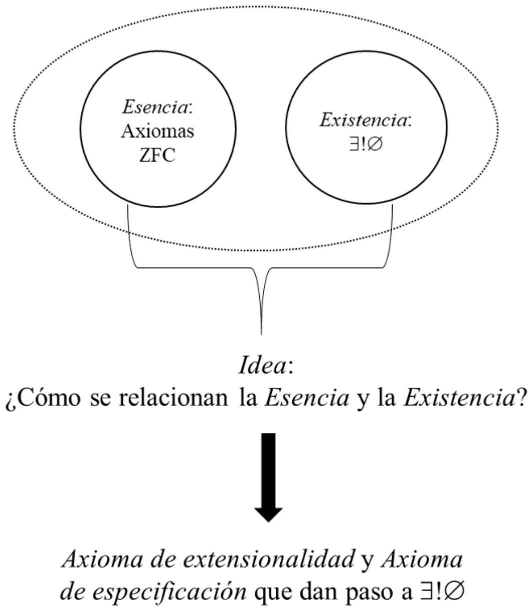

Figura 2. Ejemplo de la HO

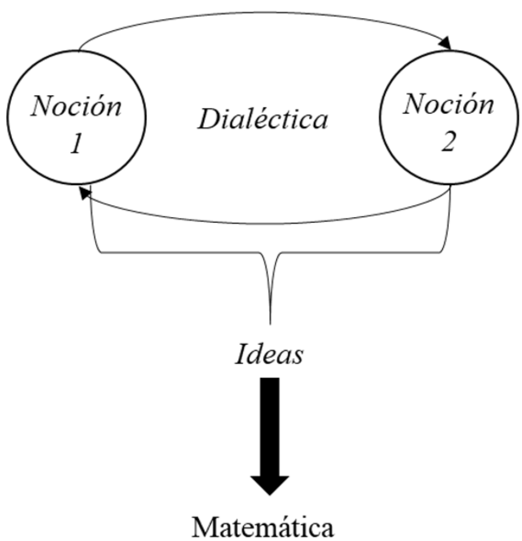

Figura 3. Esquema general de la HO

4. La Teoría de las Ideas (TI)

Si el PAF es el problema cardinal de la filosofía lautmaniana, y este se pretende abordar desde la HF y, a su vez, la HF supone la HO porque en ella se muestra cómo la matemática puede expresar o encarnar esas Nociones e Ideas que, en principio, se encuentran en los fenómenos físicos, resulta que la HO es una concepción fundamental de la filosofía de Lautman, y como tal, a partir de ella se puede ordenar y estructurar el programa filosófico lautmaniano como el mismo autor lo propone:

> Se ve, así, cuál debe ser la tarea de la Filosofía matemática, e incluso de la Filosofía de las ciencias en general. Debe edificarse la *teoría de las Ideas*, y ello exige tres tipos de investigaciones. *Primero*, aquellas que corresponden a lo que Husserl llama la eidética descriptiva, es decir, la descripción de esas estructuras ideales, encarnadas en las Matemáticas, cuya riqueza es inagotable. El espectáculo de cada una de esas estructuras, cada vez, es más que un nuevo ejemplo aportado para apoyar una misma tesis, ya que no debe excluirse que sea posible, y es esta la *segunda* tarea asignada a la Filosofía matemática, establecer una jerarquía de las Ideas y una teoría de la génesis de las Ideas, unas a partir de otras, como lo había previsto Platón. Finalmente, y esta es la *tercera* tarea anunciada, queda por rehacer el Timeo, es decir, mostrar, en el seno de las Ideas mismas, las razones de su aplicación al Universo sensible. (Lautman 2011: 382. El énfasis es mío).

Aclarando un poco la cita, la TI se puede ver como un programa que consta de tres tareas (Tabla 1), de las cuales, la primera puede ser vista como un cierto sostenimiento o fundamentación de la HO pues, aunque estas primeras investigaciones se pretenden hacer más que para sólo aportar casos que apoyaran una misma tesis, esto no significa que no pueda, e incluso que deba, operar también en ese mismo sentido. Así, los diversos ejemplos de resolución de Nociones e Ideas en ciertos fragmentos de teorías matemáticas que están consignados en la obra de Lautman serían algo así como evidencias casuísticas para sostener la HO. Cabe mencionar en este punto que, entendiendo que esta primera tarea consiste en explicitar las Nociones e Ideas encarnadas en ciertas teorías matemáticas, el que esto corresponda "a lo que Husserl llama eidética descriptiva" es bastante cuestionable, pues en la fenomenología husserliana la descripción eidética suele referirse a la búsqueda de esencias, o *eidos*, entendidas como características o rasgos invariantes de las vivencias puras del yo trascendental (Cfr. Bernet *et al*., 1993: 77-81). No obstante, considero que la relación de Lautman con la fenomenología puede ser explorada más ampliamente con resultados menos negativos y espero poder ocuparme de esto en otro momento, sobre todo porque, como se verá, en esta relación se juega una cuestión fundamental de la filosofía lautmaniana. Por su parte, sobre la segunda tarea, y dejando de lado la referencia a Platón, por la misma razón que se dejó de lado la referencia a Kant, no hay más pistas en la obra de Lautman que la enunciación recién citada, y así, queda también la interrogante de cómo o en qué sentido se debería establecer esa jerarquía y génesis de Ideas. Finalmente, la tercera forma de investigación corresponde, en lo general, a sostener y desarrollar la HF para resolver el PAF y, como ya se había mencionado anteriormente, Lautman dedicó dos textos a esta tarea: *Simetría y disimetría en matemáticas y en física* y *El problema del tiempo*, de los cuales ya hemos expresado la idea central.

Teoría de las Ideas
Primera tarea Descripciones de estructuras ideales encarnadas en la matemática
Segunda tarea Establecer una jerarquía y génesis de las estructuras ideales (Ideas)
Tercera tarea Mostrar en el seno de las Ideas su aplicación al universo sensible

Tabla 1. Las tres tareas de la TI

5. El problema de la génesis de la matemática a partir de las Ideas

Como última pieza de esta presentación esquemática de los puntos de vista clave de la filosofía de Lautman, quisiera ahora referirme a lo que considero su problema central: la definición precisa de lo que es una Idea. Este problema ya lo trata Lautman en su obra pero a él se le presenta en términos de una relación de génesis que se puede expresar en la pregunta "¿Cómo surgen las matemáticas a partir de las Ideas?". La respuesta a esta pregunta es importante porque, según se vio en el apartado anterior, la HO es la piedra de toque del proyecto lautmaniano de la TI, y entonces, s*ó*lo en la medida en que ésta quede establecida adecuadamente el resto de las indagaciones tendrán coherencia y solidez. El asunto es que Lautman percibe la relación entre matemáticas y Nociones e Ideas en un doble sentido. Por una parte, se pueden tomar las teorías matemáticas como algo dado, y entonces, esforzarse por extraer las Ideas ahí encarnadas; pero, por otra parte, hay que preguntarse cómo es que, dadas una ciertas Ideas, el estudio o análisis de estas pueden dar paso a las teorías matemáticas que las sintetizan o expresan. Así pues, la pregunta surge de manera orgánica al plantear la HO como lo hace Lautman (2011: 454) a en su *Carta a Maurice Fréchet*:

> en la medida en que una teoría matemática aporta una respuesta a un problema dialéctico definible pero no resoluble independientemente de las matemáticas, es así como la teoría me parece participar en la Idea, en el sentido de Platón, en la misma situación de la Respuesta con respecto a la Pregunta, o de la Existencia con respecto a la Esencia. Aunque, históricamente o psicológicamente, la existencia de la respuesta es la que sugiere la Idea de la pregunta (la existencia de las teorías matemáticas permite liberar así el problema dialéctico al que responden), *es de la naturaleza de una pregunta el ser racionalmente y lógicamente anterior a la respuesta*. (El énfasis es mío)

A este problema lo llamo, siguiendo un tanto a Lautman (2011: 334-343) el problema de la génesis de la matemática a partir de la Idea (PGMI). Ahora bien, aclarar esta génesis es también, o al menos lo presupone, aclararse qué es una Idea, pues sin esto no se puede comprender a cabalidad el proceso mismo de generación.

La respuesta de Lautman a esta cuestión está en su texto *Nuevas investigaciones sobre la estructura dialéctica de las matemáticas*. Ahí Lautman (2011: 334) se plantea la relación entre Ideas y matemática, entre pregunta y respuesta, como una relación de "dominación" que es preciso aclarar, y para ello, él optará por caracterizar esta dominación como una relación "trascendental" en el sentido en que, según él, Heidegger utiliza el término en el texto *Vom Wesen des Grundes* (*De la esencia del fundamento*. Heidegger 2001: 109-149). Para decirlo brevemente, lo que Lautman (2011: 336) recupera de este texto de Heidegger es lo que se puede denominar una *Teoría general de los actos de génesis* (TGAG). Ésta divide los actos de génesis de los objetos de conocimiento, incluidos los matemáticos, en dos momentos. El primero es el de la *precomprensión ontológica* que consiste en delimitar el campo sobre el que se platea una pregunta de conocimiento, un cierto "por qué"; es decir, este momento consiste sólo en el recorte del ámbito sobre el que versará un cierto conocimiento posible guiado por una pregunta. El segundo momento se le denomina desvelación de la *verdad ontológica* y corresponde a la formación de los conceptos y los problemas del campo en cuestión. Es ahí donde las Ideas aparecerían y, con ellas, las matemáticas que las encarnan, pues la aparición de los conceptos fundamentales se da a la par de un dominio de objetos que los concretizan y de sus conceptos fundamentales. La cita relevante del texto de Heidegger (2001:116) es la siguiente:

> Entre la comprensión preontológica del ser y la problemática expresa de dicho concebir el ser nos encontramos con múltiples grados. Un grado característico es, por ejemplo, el proyecto de la constitución del ser de lo ente mediante el cual un campo determinado (naturaleza, historia) queda delimitado simultáneamente como ámbito de una posible objetivación por parte del conocimiento científico. La determinación previa del ser de la naturaleza en general (qué es y cómo es) se consolida en los «conceptos fundamentales» de la ciencia correspondiente. En dichos conceptos se delimitan, por ejemplo, el espacio, lugar, tiempo, movimiento, masa, fuerza o velocidad…

A partir de esta idea, Lautman (2011: 336) escribe:

> Resulta entonces, y este para nosotros es el punto fundamental, que esa develación de la verdad ontológica del ser no puede hacerse sin que se dibujen al mismo tiempo los aspectos concretos de la *existencia óntica* [...] Se ve así [...] cómo se desdobla una misma actividad, o, mejor, cómo actúa en dos planos diferentes; la constitución del ser de lo existente, en el plano ontológico, no puede ser separada de la determinación, en el plano óntico, de la existencia fáctica de un dominio donde toman vida y materia los objetos de una indagación científica. La inquietud por conocer lo que constituye la esencia de ciertos conceptos tal vez no está orientada primitivamente hacia las realizaciones de esos conceptos, pero resulta que el análisis conceptual termina necesariamente proyectando, como frente al concepto, las nociones concretas en las cuales este se realiza o se historializa [sic].

A mi parecer, este recurso a Heidegger, si bien apunta a la dirección en que el PGMI puede pensarse para resolverse, aún deja mucho por aclarar, pues decir que la génesis de la matemática a partir de la Idea se da por una cierta disposición es decir algo, pero no mucho, y aún menos, suficiente para dar el asunto por resuelto, pues esto equivale a decir, simplificando, que es el modo de abocarse el matemático a sus trabajos el que lo hace atender a las Ideas y, así, generar la matemática que a él le interesa, pero ¿qué es este "modo de abocarse"? ¿Cómo estos problemas lógicos le pasan desapercibidos al matemático y no al filósofo que los recupera? ¿Qué modos, niveles y estructuras de la experiencia están implicados en estos actos de génesis que los hacen tan particulares como para dar paso a la ciencia matemática, pero al mismo tiempo tan generales para ser una forma de toda experiencia de conocimiento? Dicho de otro modo: ¿qué se debe entender cabalmente, pues, como una Idea en sentido lautmaniano? Todas estas preguntas me parecen pertinentes y dignas de consideración debido a que la TGAG retomada por Lautman de Heidegger no da una respuesta absolutamente clara.

6. Conclusión

A manera de conclusión, lo expuesto hasta ahora se puede representar en el siguiente esquema (Figura 4):

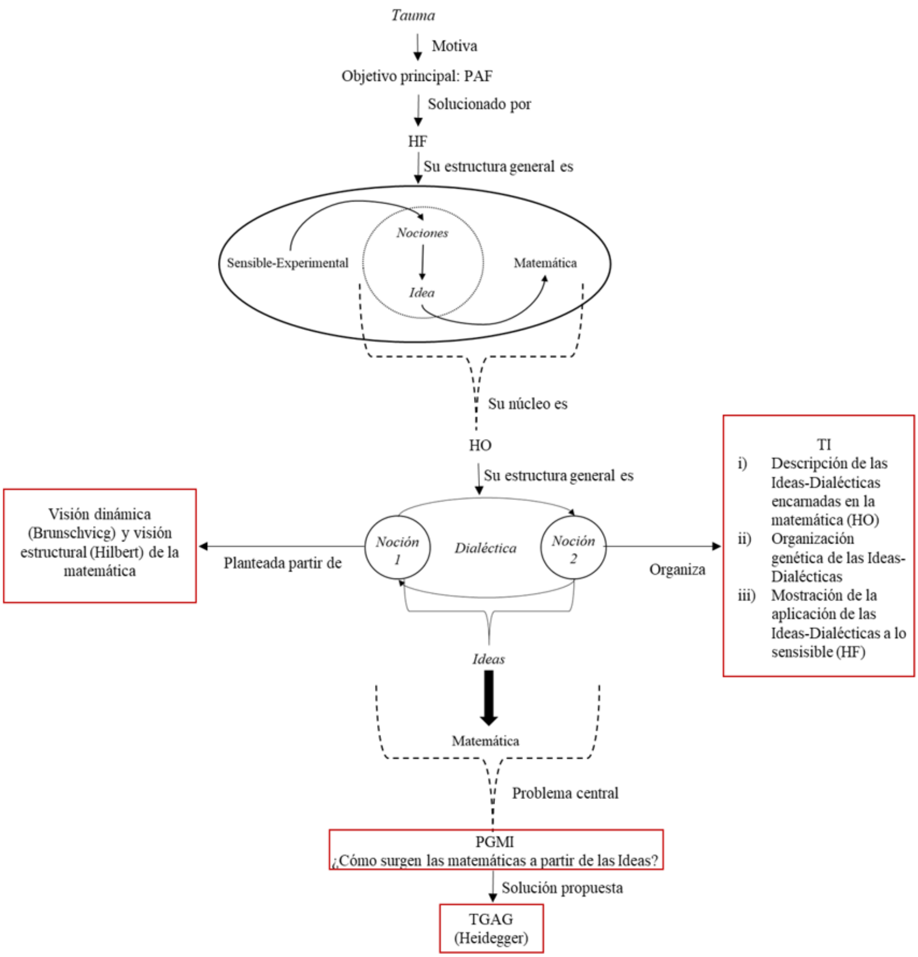

Figura 4. Esquema sistemático de la filosofía lautmaniana

Cabe recordar, además, las cuestiones que han quedado abiertas en la exposición y que no se contemplan en el esquema ya que pueden ser puntos de interés:

1. El problema central de la clarificación de las Ideas.
2. La relación entre fenómenos físicos y Nociones.
3. La relación de las posiciones Lautman con la filosofía de Platón.
4. La comprensión de las Ideas como ideas kantianas.
5. La relación de Lautman con la fenomenología.
6. El esclarecimiento del sentido de una génesis de Ideas unas a partir de otras.
7. Soy consciente de que este esquema, junto con la exposición que le precede, no es suficiente para decidir si Lautman es un autor que realmente hay que considerar para la actualidad de la filosofía de la ciencia y de la matemática. No obstante, sí espero que la clarificación de su filosofía aquí desarrollada pueda servir de base para llamar la atención sobre su pensamiento, sea para que se le critique, sea para que se le retome, y así, la exploración de su filosofía se desarrolle con mayor ahínco e interés.

Referencias

Alunni, C. (2006), "Continental genealogies. Mathematical confrontations in Albert Lautman and Gaston Bachelard", en *Virtual mathematics: the logic of difference*, Duffy, S. (Ed.), Manchester: Clinamen Press, pp. 65-99.

Arriaga, J. P. (2018) *Matemáticas e Ideas Dialéticas. Ensayo sobre algunas aperturas para la ontología de la matemática a partir de la filosofía de Albert Lautman*, Guanajuato: Universidad de Guanajuato.

Barot, E. (2003), "L'objectivité mathématique selon Albert Lautman: entre Idées dialectiques et réalité physique", *Cahiers François Viète*, Núm. 6, pp. 3-27.

_______, (2009), *Lautman*, París: Les Belles Lettres.

Benacerraf, P. & Putnam, H. (Eds.) (1998), *Philosophy of mathematics: selected readings* (2a ed.), Cambridge: Cambridge University Press.

Bernet, Rudolf, *et al.*, (1999), *An introduction to husserlian phenomenology*, Illinois: Northwestern University Press.

Brunschvicg, L. (1945), *Las etapas de la filosofía matemática*, Trad. Cora Ratto de Sadoski, Buenos Aires: Lautaro.

Cassou-Noguès, P. (2010), "Virtual Platonisms: Lautman and Gödel" en *Postanalytical and metacontinental. Crossing philosophical Divides*, Reynold, J., *et al.* (Comps.), London/New York: Continuum, pp. 216-235.

Corfield, D. (2010), "Understanding the Infinite I: Niceness, Robustness, and Realism", *Philosophia Mathematica*, vol. 18, Núm. 3, pp. 253-275.

Heidegger, M. (2001), "De la esencia del fundamento", en *Hitos*, Trad. Helena Cortés y Arturo Leyte, Madrid: Alianza Editorial, pp. 109-149.

Hilbert, D. (1993), *Fundamentos de las matemáticas*, Carlos Álvarez y Felipe Segura (Eds.), Trad. Felipe Segura, México: UNAM.

Jacquette, D. (Ed.) (2002), *Philosophy of mathematics: an anthology*, Malden: Blackwell.

Lautman, J. (2006), "Présentation" en Lautman A. *Les mathématiques, les Idées et le réel Physique*, Paris: Vrin, pp. 7-13.

Lautman, A. (2011), *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas*, Zalamea, F. (Ed.), Trad. Fernando Zalamea, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

Pérez Lora, O. J., (2019), "El modelo THK. Abordaje de la filosofía de las matemáticas desde un punto de vista sintético", *Tópicos del seminario*, Núm. 42, pp. 79-99.

Petitot, Jean, (1987), "Refaire le Timée. Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman", *Revue d'Histoire des Sciences*, vol. 40, Núm. 1, pp. 79-115.

Salanskis, J.-M. (2008), *Philosophie des mathématiques. Problèmes & Controverses*, Paris: Vrin.

Shapiro, S. (Ed.) (2005), *The oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*, New York: Oxford University Press.

Zalamea, F. (1994), "La filosofía de la matemática de Albert Lautman", *Mathesis*, vol. 10, Núm. 3, pp. 273-289.

__________ (2006), "Signos triádicos. Lógicas, literaturas, artes. Nueve cruces latinoamericanos", *Mathesis*, vol. 1 Núm. 1, pp. 1-164.

__________ (2008), "La creatividad en las matemáticas y en las artes plásticas: conceptografía de transferencias y obstrucciones a través del sistema peirceano, *Utopía y Praxis Latinoamericana*, vol. 13, Núm. 40, pp. 99-110.

__________ (2009), *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

__________ (2011), "Estudio introductorio y Bibliografía" en Lautman, A., 2011, *Ensayos sobre la dialéctica, estructura y unidad de las matemáticas modernas*, Zalamea, F. (Ed.) Trad. Fernando Zalamea, Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

__________ (2013), *Antinomias de la creación. Las fuentes contradictorias de la invención en Valéry, Warburg, Florenski*, Chile: FCE.